# Konstruktion von Einstein–Maxwell-Feldern aus Einsteinschen Vakuumfeldern

VOLKER ENSS

I. Institut für Theoretische Physik der Universität Hamburg

(Z. Naturforschg. **22 a**, 1361—1363 [1967]; eingegangen am 1. Juni 1967)

*Herrn Professor Dr.* PASCUAL JORDAN *zum 65. Geburtstag gewidmet*

A method is discussed for constructing exact solutions of the EINSTEIN–MAXWELL equations from vacuum solutions. By means of changes of the metric, the properties of which are listed in § 2, one gets all electromagnetic solutions with the properties (7), Satz 5. In § 3, the transformations and the constructed fields are all given explicitely in terms of the vacuum metric.

## § 1. Bezeichnungen und Konventionen

Lateinische Indizes außer $n$: 0, 1, 2, 3,

$n=0$ für $\varepsilon=-1$; $x^n=x^0$, $\xi$ zeitartig,

$n=3$ für $\varepsilon=+1$; $x^n=x^3$, $\xi$ raumartig,

griechische Indizes: 0, 1, 2, 3, jedoch $\neq n$;
Komma „ , “: gewöhnliche Ableitung,
einfacher Strich „ | “: kovariante Ableitung mit der Metrik $ds^2$ (1),
Doppelstrich „ ‖ “: kovariante Ableitung mit der Metrik $d\bar{s}^2$ (3),
eckige Klammern um Indizes „[...]“: schiefsymmetrischer Teil,
runde Klammern um Indizes „(...)“: symmetrischer Teil,
$\tilde{\eta}_{\lambda\mu\nu}$: Dualitätspseudotensor der Metrik $d\tilde{s}^2$,
$\bar{R}_b{}^a$: RICCI-Tensor der Metrik $d\bar{s}^2$ (3),
$\bar{R}=\bar{R}_a{}^a$,
$c=\varkappa=1$.

Die EINSTEIN–MAXWELL-Gleichungen für $d\bar{s}^2$ haben die Form:

$$-\bar{R}_b{}^a=T_b{}^a=F^{ac}F_{bc}-\tfrac{1}{4}F^{cd}F_{cd}\,\delta_b{}^a,$$
$$F^{ab}{}_{\|b}=F_{[ab\|c]}=0\,.$$

## § 2. Charakterisierung und Eigenschaften der metrischen Transformationen

Sei $V_4$ eine nicht flache normalhyperbolische 4-dimensionale RIEMANNsche Mannigfaltigkeit mit der Metrik $ds^2$ der Signatur $(-+++)$, die einen nicht lichtartigen hyperflächennormalen KILLING-Vektor $\xi$ zuläßt. Durch Anpassung der Koordinaten an die Isometrie kann $ds^2$ in die folgende Form gebracht werden:

$$ds^2=\varepsilon\, e^{2U}(dx^n)^2+e^{-2U}\,d\tilde{s}^2,\quad \varepsilon=\pm 1, \tag{1}$$
$$d\tilde{s}^2=\tilde{g}_{\mu\nu}\,dx^\mu\,dx^\nu$$

mit der Signatur $(+++)$ für $\varepsilon=-1$,
$(-++)$ für $\varepsilon=+1$,

$$\tilde{g}_{\mu\nu,n}=U_{,n}=0\,,\qquad U_{,\mu}\neq 0\,.$$

Für $\xi$ gilt:

$$\xi^a=\delta_n{}^a,\qquad \xi^a\,\xi_a=\varepsilon\, e^{2U},$$
$$\xi_{(a|b)}=\xi_{[a}\,\xi_{b|c]}=0\,. \tag{2}$$

Für $\varepsilon=\left[\begin{smallmatrix}+1\\-1\end{smallmatrix}\right.$ ist $x^n$, $\xi$ $\left[\begin{smallmatrix}\text{raum-}\\\text{zeit-}\end{smallmatrix}\right.$ artig.

Es soll eine Gruppe von Transformationen der Metrik untersucht werden, die $V_4$ in Raumzeiten $\bar{V}_4$ mit ähnlichen Eigenschaften wie $V_4$ überführt. Sei hierfür $\bar{V}_4$ dieselbe Mannigfaltigkeit wie $V_4$, jedoch mit der Metrik $d\bar{s}^2$ versehen, die in den in $V_4$ benutzten Koordinaten die Form hat:

$$d\bar{s}^2=\varepsilon\, e^{2G}(dx^n)^2+e^{-2G}\,d\tilde{s}^2, \tag{3}$$

$$G_{,n}=0\,,\quad \varepsilon, x^n \text{ und } d\tilde{s}^2 \text{ wie in } (1),$$

mit dem KILLING-Vektor $\bar{\xi}$:

$$\bar{\xi}^a=\delta_n{}^a,\quad \bar{\xi}^a\,\bar{\xi}_a=\varepsilon\, e^{2G},\quad \bar{\xi}_{(a\|b)}=\bar{\xi}_{[a}\,\bar{\xi}_{b\|c]}=0, \tag{4}$$

und es gelte:
$$G=G(U)\,. \tag{5}$$

Sei $T$ die Gruppe der Transformationen $t$ der Metrik:

$$t:\quad \begin{cases} V_4 \to \bar{V}_4\,,\\ ds^2 \to d\bar{s}^2,\\ U \;\to G(U)\,. \end{cases} \tag{6}$$

*Satz 1:* Es gibt genau dann eine Transformation $t\in T$, die die nicht flache Raumzeit $V_4$ in $\bar{V}_4$ überführt, wenn die folgenden vier koordinatenunabhängigen Bedingungen A.–D. in $V_4$, $\bar{V}_4$ erfüllt sind:

A. Es gibt in $V_4$ eine nicht lichtartige hyperflächennormale Isometrie $\xi$, deren Trajektorien die Trajektorien einer ebensolchen Isometrie $\bar{\xi}$ in $\bar{V}_4$ sind.

B. Die Orthogonalhyperflächen der Isometrie $\xi$ in $V_4$ sind auch Orthogonalhyperflächen der Isometrie $\bar{\xi}$ in $\bar{V}_4$.

C. Auf den Hyperflächen $\xi^a\,\xi_a=\text{const}$ in $V_4$ gilt auch $\bar{\xi}^a\,\bar{\xi}_a=\text{const}$ in $\bar{V}_4$.

D. Für zwei Richtungen, deren eine, $\delta x^a$, parallel zur Isometrie ist, die andere, $\mathrm{d}x^a$, orthogonal dazu, ist das Produkt der Längen beider Vektoren invariant unter $T$:

$$\delta x^{[a}\,\xi^{b]} = 0 \qquad \delta x_a = g_{ab}\,\delta x^b\,,$$
$$\overline{\delta x_a} = \bar{g}_{ab}\,\delta x^b\,,$$
$$\mathrm{d}x^a\,\xi_a = 0 \qquad \mathrm{d}x_a = g_{ab}\,\mathrm{d}x^b\,,$$
$$\overline{\mathrm{d}x_a} = \bar{g}_{ab}\,\mathrm{d}x^b\,,$$

dann gilt:

$$(\delta x^a\,\delta x_a)\,(\mathrm{d}x^b\,\mathrm{d}x_b) = (\delta x^a\,\overline{\delta x_a})\,(\mathrm{d}x^b\,\overline{\mathrm{d}x_b})\,.$$

Die Transformationen $t \in T$ haben ferner die folgenden Eigenschaften:

E. Läßt $V_4$ einen KILLING-Vektor $\eta$ zu, der mit $\xi$ eine ABELsche Isometriegruppe erzeugt, so sind die Trajektorien von $\eta$ in $V_4$ auch Trajektorien einer Isometrie $\bar{\eta}$ in $\overline{V}_4$, $\bar{\xi}$ und $\bar{\eta}$ erzeugen eine ABELsche Isometriegruppe von $\overline{V}_4$.

F. Die Metriken auf den Orthogonalhyperflächen der Isometrien $\xi$ in $V_4$ bzw. $\bar{\xi}$ in $\overline{V}_4$ unterscheiden sich nur um den Konformfaktor:

$$(\xi^a\,\xi_a)\,(\bar{\xi}^b\,\bar{\xi}_b)^{-1}.$$

G. Der Winkel zwischen zwei Richtungen, die beide orthogonal zu $\xi$ sind, ist invariant. Die Orthogonalität zweier Richtungen, von denen mindestens eine orthogonal zu $\xi$ ist, ist invariant.

Für zeitartiges $\xi$ bedeutet C., daß die gravischen Äquipotentialflächen unter $T$ erhalten bleiben.

## § 3. Konstruktion elektromagnetischer Lösungen

Ein Feld mit folgenden Eigenschaften werde mit (7) gekennzeichnet:

(7) Das Feld genüge den EINSTEIN–MAXWELL-Feldgleichungen (einschließlich des Grenzfalles Vakuum). Die Metrik lasse einen nicht lichtartigen hyperflächennormalen KILLING-Vektor $\bar{\xi}$ zu mit $|\bar{\xi}^a\,\bar{\xi}_a| \equiv e^{2G}$. Der durch die Isometrie ausgezeichnete 2-dimensionale Teilraum des Tangentialraumes, der von $\bar{\xi}_a$ und $G_{,b}$ aufgespannt wird, ist Eigenraum des Energie-Impulstensors zum Eigenwert $\varrho$.

Für reguläre Felder ($\varrho \neq 0$) gelte außerdem $|G_{,a}\,G^{\|a}| > |\varrho|$ (für raumartiges $\bar{\xi}$ ist das immer erfüllt).

Für Nullfelder (reine Strahlungsfelder, $\varrho = 0$) gelte auch, daß der Strahlenvektor $k_a$ : ($T_{ab} = k_a\,k_b$) ein Gradient ist.

*Satz 2:* Sei $V_4$ ein nicht flaches Vakuumfeld mit der Metrik (1) und sei $t \in T$ so gewählt, daß in $\overline{V}_4$ mit der Metrik (3) gilt:

der Energie-Impulstensor ist spurfrei: $\overline{R} = 0$,

die Energiedichte ist für alle Beobachter nicht-negativ: $-\overline{R}_{ab}\,V^a\,V^b \geqq 0$ für alle $V_a\,V^a = -1$.

Dann ist $\overline{V}_4$ ein Feld (7).

Für nicht lichtartiges $U_{,a}$ lautet die allgemeine Lösung:

$$e^G = \frac{e^U}{A\,e^{2U} + B}\,, \tag{8 a}$$

$$F_{n\varrho} = \cos\psi\,\sqrt{8\,\varepsilon\,A\,B}\,e^{2G}\,U_{,\varrho}\,,$$
$$F_{\mu\nu} = \sin\psi\,\sqrt{8\,\varepsilon\,A\,B}\,\tilde{\eta}_{\mu\nu\varrho}\,U^{\|\varrho}\,.$$

Die Konstanten $A$ und $B$ sind so zu wählen, daß $\sqrt{\varepsilon\,A\,B}$ reell ist, $(A\,e^{2U} + B) > 0$ in dem interessierenden Raumzeitbereich. Der Dualitätswinkel $\psi$ ist konstant.

Das elektromagnetische Feld ist regulär.

Ist $U_{,a}$ lichtartig ($\xi$ ist dann notwendig raumartig), so ist die allgemeine Lösung:

$$G(U) \text{ erfüllt } (G')^2 < 1, \quad G' \equiv \mathrm{d}G/\mathrm{d}U\,, \tag{8 b}$$

$$F_{3\varrho} = \cos\psi\,\sqrt{2\,(1-(G')^2)}\,e^G\,U_{,\varrho}\,, \tag{8 b}$$
$$F_{\mu\nu} = \sin\psi\,\sqrt{2\,(1-(G')^2)}\,e^{-G}\,\tilde{\eta}_{\mu\nu\varrho}\,U^{\|\varrho}\,.$$

Der Dualitätswinkel $\psi$ ist eine beliebige Funktion von $U$.

Das Feld ist ein Nullfeld mit einer nicht verdrillten, expansionsfreien Strahlenkongruenz.

Die Lösungen (8) und ihre Konstruktion wurden für zeitartiges $\xi$ von BONNOR [1] angegeben, für raumartiges $\xi$ gab MISRA [2] die Spezialfälle mit $A = B$, $\psi \equiv 0$ an.

*Satz 3:* Ist $V_4$ ein flaches Vakuumfeld (es folgt, daß $\mathrm{d}\bar{s}^2$ flach ist), so ist das allgemeine elektromagnetische Feld mit der Metrik (3), $\varepsilon = -1$:

$$G \text{ erfüllt } G^{\|\mu}{}_{\mu} = 0\,, \tag{9}$$

$$F_{0\mu} = \cos\psi\,\sqrt{2}\,(e^G)_{,\mu}\,,$$
$$F_{\mu\nu} = \sin\psi\,\sqrt{2}\,\tilde{\eta}_{\mu\nu\varrho}\,(e^{-G})^{\|\varrho}\,, \tag{9}$$
$$\psi = \text{const}\,.$$

Diese Konstruktionen wurden von MAJUMDAR [3] und BONNOR [1] behandelt.

Für $\varepsilon = +1$ hat das Feld negative Energiedichte.

*Satz 4:* Sei $\overline{V}_4$ ein Feld (7), dann gibt es immer eine Transformation $t \in T$, $t$: $\overline{V}_4 \to \overline{\overline{V}}_4$ derart, daß $\overline{\overline{V}}_4$ ein Vakuumfeld ist.

[1] W. B. BONNOR, Z. Phys. **161**, 439 [1961].
[2] M. MISRA, J. Math. Phys. **7**, 155 [1966].
[3] S. D. MAJUMDAR, Phys. Rev. **72**, 390 [1947].
[4] V. ENSS, Diplomarbeit, Hamburg 1967.

Also gilt der

*Satz 5:* Aus einem Vakuumfeld, das eine nicht lichtartige hyperflächennormale Isometrie zuläßt, kann mit den Methoden (6), (8) oder (9) eine Schar exakter Lösungen der EINSTEIN–MAXWELL-Gleichungen konstruiert werden. Sämtliche Lösungen der Klasse (7) können so gewonnen werden.

Die Beweise sowie weitere Literaturangaben sind vom Autor in [4] gegeben.

Für die Anregung zu dieser Arbeit sowie die Unterstützung bei der Durchführung danke ich den Mitgliedern des Hamburger Seminars für allgemeine Relativitätstheorie, insbesondere den Herren Dr. TRÜMPER und Dr. KUNDT. Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. PASCUAL JORDAN.

# Refractive Index Measurements of Molten Salts with Wave-Front-Shearing Interferometry

## II. $LiNO_3$, $NaNO_3$, $KNO_3$, $RbNO_3$, and $CsNO_3$

LENNART W. WENDELÖV, SILAS E. GUSTAFSSON, NILS-OLOV HALLING, and ROLF A. E. KJELLANDER

Institute of Physics, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden

(Z. Naturforschg. **22 a**, 1363—1366 [1967]; received 30 May 1967)

A wave-front-shearing interferometer has been used to determine the refractive index of the alkali nitrates $LiNO_3$, $NaNO_3$, $KNO_3$, $RbNO_3$, and $CsNO_3$ from the melting point to a temperature just below the decomposition point. The accuracy of these measurements has been estimated to $\pm 3 \cdot 10^{-5}$ which should be compared with $\pm 3 \cdot 10^{-3}$, being the estimated error in earlier determinations. The refractive index is found to depend almost linearly on temperature. For most of the investigated liquids, however, one gets a better fit to the measured values if a second order dependence is assumed.

As part of a larger program to apply optical techniques to the study of transport properties of molten salts it has been necessary to remeasure the refractive index of these liquids. The accuracy of the methods used in earlier determinations is much too low, which can easily be seen if one tries to get a reliable value of $(dn/dt)$, where $n$ is the refractive index and $t$ the temperature. This quantity must be known within one percent when measuring thermal conductivity whilst the differences between recent published data are sometimes of the order of 50 percent [1, 2]. The methods applied up to now are based upon two different principles. In the first one the minimum deviation of a light beam passing through a hollow prism containing the melt is measured [1, 3] and in the second one the familiar "bent stick" principle is utilized, where a direct reading of the angles of incidence and refraction can be made [1, 2, 4, 5]. The reason why the accuracy of these methods is limited is that the refractive index is calculated from the ratio of two trigonometric functions containing measured angles. Even if the readings of the angles are very accurate the errors are still rather big. In order to avoid this difficulty we are using a wave-front-shearing interferometer which combines two light beams, one passing through the liquid and the other through a rotatable quartzplate (fused quartz) inside the liquid. Since we are using the refractive index of the quartz plate as a reference one may consider it a relative method but it is equally easy to determine the refractive index of quartz relative to vacuum and thus making the method an absolute one. A detailed description of the method is given elsewhere [6]. The construction of a container with optically flat windows for the liquid and a thermostat which allows the light to pass without distortion of the wavefront is discussed in reference [7].

1 J. ZARZYCKI and F. NAUDIN, C. R. Acad. Sci. Paris **256**, 1282 [1963].
2 H. BLOOM and D. C. RHODES, J. Phys. Chem. **60**, 791 [1956].
3 C. D. THURMOND, J. Am. Chem. Soc. **75**, 3928 [1953].
4 O. H. WAGNER, Z. Physik. Chem. **131**, 409 [1928].
5 G. MYERS and A. HECK, Z. Physik. Chem. **100**, 316 [1922].
6 L. W. WENDELÖV, L. E. WALLIN, and S. E. GUSTAFSSON, Z. Naturforschg. **22 a**, 1180 [1967].
7 S. E. GUSTAFSSON, N. O. HALLING, and R. A. E. KJELLANDER, to be published.